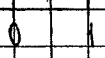
ANALISI MATEMATICA II

– prof. Marco Poletti
prof. Marco Franciosi

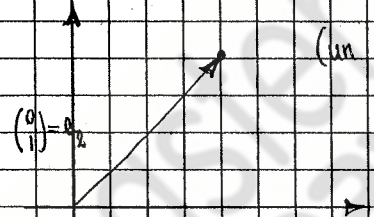
MASTER COPY
Tel. 388/9837745

⇒ 1ª lezione – 15/03/11

– $\mathbb{R}^1$

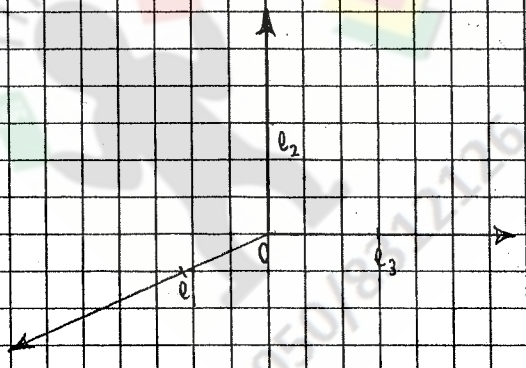


$\mathbb{R}^2$

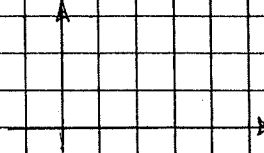


(un numero può essere visto come VETTORE o come PUNTO

$\mathbb{R}^3$



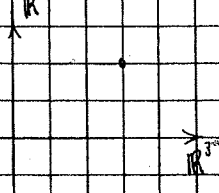
$\mathbb{R}^n$



oppure

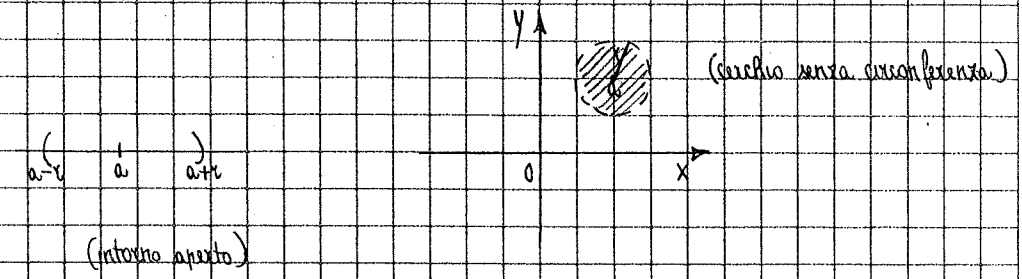
In generale spesso considereremo $\mathbb{R}^n$ (con $n \geq 4$) come prodotto cartesiano di $\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$.

Ad esempio $\mathbb{R}^5 = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2$



$$\left((x_1, x_2, x_3), (x_4, x_5) \right)$$

In $\mathbb{R}^1$ e $\mathbb{R}^2$ la distanza si valuta facilmente:



(cerchio senza circonferenza)

(intorno aperto)

Anche in $\mathbb{R}^3$ è facile: basta pensare ad una SFERA di raggio r (esclusa la sua superficie)

→ vedi par. 1.1 pag. 1-2

— ∘ — ∘ — ∘ — ∘ —

⇒ 2ª lezione — 16/03/11

→ vedi par. 1.2, 1.3 pag. 3-6

— ∘ — ∘ — ∘ — ∘ —

⇒ 3ª lezione — 22/03/11

→ vedi par. 1.3 pag. 4-6

- Prendo un punto $a \in \mathbb{R}^n$ e fisso un $r > 0$

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Prendo gli intervalli $(a_1 - r, a_1 + r), \dots, (a_n - r, a_n + r)$ e ne faccio il prodotto CARTESIANO:

$(a_1-r, a_2+r) \times \dots \times (a_n-r, a_n+r)$

In $\mathbb{R}$ ho di nuovo un intorno (intervallo), in $\mathbb{R}^2$ un quadrato, in $\mathbb{R}^3$ un cubo, ...

In generale allora in $\mathbb{R}^n$ un cubetto $C(a;r)$, cioè di centro a e semilaggio r.

a) $\quad I(a;r) \subset C(a;r)$

Dim. della relazione: Un $x \in I(a;r)$ è tale che $\|x-a\| < r$, cioè che $\sqrt{(x_1-a_1)^2+\dots+(x_n-a_n)^2} < r$

Quindi ogni $|x_i-a_i| < r$, quindi $x \in (a_i-r; a_i+r)$ C.V.D.

b) $\quad C(a; r/\sqrt{n}) \subset I(a;r)$

Dim. della relazione: Prendo un $x \in C(a; r/\sqrt{n})$. Esso è tale che: $|x-a_1| < r/\sqrt{n}, \dots, |x_n-a_n| < r/\sqrt{n}$

Ora, $\|x-a\| = \sqrt{(x_1-a_1)^2+\dots+(x_n-a_n)^2} < r$, cioè $x \in I(a;r)$.

MASTER COPY

Tel. 388/9837745

- $C(a;r)$ è aperto? Sì, sempre!

Dato un cubetto è infatti banale trovare un "sottocubetto", al cui interno si può sempre includere un intorno sferico.

Teorema: • un punto è interno se e solo se esiste un cubetto di centro quel punto contenuto nell'insieme

• " " " esterno " " " " " " " contenuto nel complemento

• " " " di frontiera se non è né interno né esterno

— o — o — o — o —

⇒ 4ª lezione – 23/03/11

→ vedi pag. 1.4 pag. 7

- Dimostra che $\lim_{\lambda\to\infty} \begin{pmatrix} e^{-\lambda}\cos\lambda \\ e^{-\lambda}\sin\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Si tratta di vedere se $\forall \varepsilon > 0$ si ha che:

$$\left\| \begin{pmatrix} e^{-\lambda}\cos\lambda \\ e^{-\lambda}\sin\lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = e^{-\lambda} < \varepsilon \quad \text{definitivamente.}$$

$$\Downarrow$$

$$\lambda > -\ln\varepsilon \qquad \text{OK!}$$

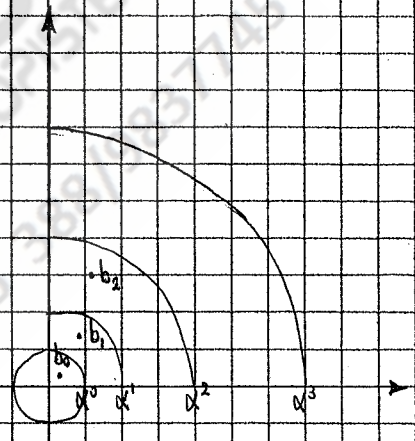
MASTER COPY

Tel. 388/9837745

- $\mathbb{R}^n$ $\qquad \alpha > 0 \quad (\text{anzi } > 1)$

Prendo la successione:

$$a_\lambda = \frac{1}{0!}b_0 + \frac{1}{1!}b_1 + \frac{1}{2!}b_2 + \dots + \frac{1}{\lambda!}b_\lambda$$



Si può dimostrare che le a_λ (tutte le possibili successioni con diverse scelte dei punti b_i) sono succ. di Cauchy e quindi, per il teorema di completezza di $\mathbb{R}^n$, anche convergenti. DIMOSTRIAMOLO!

$\forall \varepsilon > 0$ devo trovare un $\tilde{\lambda}$ (che non so se esista) t.c. $\forall \lambda_1, \lambda_2 \geq \tilde{\lambda}$ (con $\lambda_2 > \lambda_1$, tanto è uguale)

$$\|a_{\lambda_2} - a_{\lambda_1}\| = \left\| \frac{1}{(\lambda_1+1)!}b_{\lambda_1+1} + \dots + \frac{1}{\lambda_2!}b_{\lambda_2} \right\| \leq \frac{1}{(\lambda_1+1)!}\|b_{\lambda_1+1}\| + \dots + \frac{1}{\lambda_2!}\|b_{\lambda_2}\| <$$

$$< \frac{1}{(\lambda_1+1)!}\alpha^{\lambda_1+1} + \dots + \frac{1}{\lambda_2!}\alpha^{\lambda_2} < \varepsilon \qquad \left(\simeq e^{\alpha}_{\lambda_2} - e^{\alpha}_{\lambda_1}\right)$$

... sviluppo di e^α!

- Prendo un intervallo chiuso $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ e lo spazio vettoriale delle funzioni continue in $[a,b]$, $C^0[a,b]$

Poniamo: $f \cdot g = \int_a^b f(t)\, g(t)\, dt$

$f \cdot f = \int_a^b f(t)^2\, dt$ → Il prodotto scalare è definito POSITIVO!

In questo ambiente si può parlare, come in $\mathbb{R}^n$, di limiti, successioni di funzioni, norme.

N.B.: In questo ambiente le successioni di Cauchy non sono quasi mai convergenti!
Questa proprietà di completezza infatti è "privata", tipica solo di alcuni ambienti come $\mathbb{R}^n$.

— o — o — o — o —

⇒ 5ª lezione – 29/03/11

→ vedi par. 1.5 pag. 11-13

— o — o — o — o —

⇒ 6ª lezione – 30/03/11

→ vedi par. 1.5 pag. 11-13

Si dimostra il T.H. prendendo in considerazione gli intorni dei punti $\in X$ e intorni di un punto $A \notin X$ t.c. ognuno di questi non interseca X perché lo si prende non interagente con un intorno di un punto $\in X$.

⇓

X quindi è CHIUSO e LIMITATO